Esercizio n.1 **[10 punti]**

Si consideri una sfera metallica di raggio R_1, caricata con una densità di carica superficiale σ e che possiede un potenziale elettrico V_1.

A) Calcolare il raggio R_1 e la capacità elettrica della sfera. La sfera (1) viene quindi posta in contatto con un'altra sfera metallica (2) di raggio $R_2=R_1/2$.

B) Calcolare, dopo un tempo sufficientemente lungo, il potenziale della sfera 2.

Dati: $\boldsymbol{\sigma = 11\ \mu C/m^2}$; $\boldsymbol{V_1 = 10\ kV}$; $\boldsymbol{R_2 = R_1/2}$

NOTA: tutti i calcoli possono essere fatti con un'approssimazione del 10%.

Soluzione

A) La densità di carica è definita come $\sigma = \frac{Q}{S}$ da cui Q=σ S ; si ha inoltre $V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{4\,\pi\,R_1^2\,\sigma}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1} = \frac{R_1\,\sigma}{\varepsilon_0}$ da cui si

può calcolare $\boldsymbol{R_1} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_0 V_1}}{\boldsymbol{\sigma}} \cong \frac{9\cdot 10^{-12}\cdot 10\cdot 10^3}{11\cdot 10^{-6}} m = \frac{90}{11}\ 10^{-3}\ m \cong \boldsymbol{8\ \cdot 10^{-3}\ m}$ $\therefore$

Si ha inoltre $\boldsymbol{C_1 = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1} = \frac{R_1}{k} \cong \frac{8\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^9} F \cong 0{,}9\ \cdot 10^{-12} F = \boldsymbol{0{,}9\ pF}$ $\therefore$

A) Anche: $C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{\sigma\cdot S_1}{V_1} = \frac{\sigma\cdot 4\pi\cdot R_1^2}{V_1}$

B) All'equilibrio i potenziali delle due sfere saranno uguali, quindi :

$V_1^f = V_2^f$ il potenziale di una sfera caricata con una carica Q e di raggio R è $V = kQ/R$ da cui:

$\frac{kQ_1^f}{R_1} = \frac{kQ_2^f}{R_2}$ la carica finale sulla sfera 2 sarà: $Q_2^f = Q_1^f \frac{R_2}{R_1} = Q_1^f \frac{1}{2}$

Per la conservazione della carica si ha inoltre: $Q_2^f + Q_1^f = Q$ $\rightarrow$ $Q_1^f \frac{1}{2} + Q_1^f = \frac{3}{2}\ Q_1^f = Q$

Quindi $Q_1^f = \frac{2}{3} Q$ e $\boldsymbol{V_2^f = V_1^f} = \frac{Q_1^f}{C_1} = \frac{2}{3}\frac{Q}{C_1} = \frac{2C_1V_1}{3C_1} = \boldsymbol{\frac{2}{3} V_1}$ $\therefore$

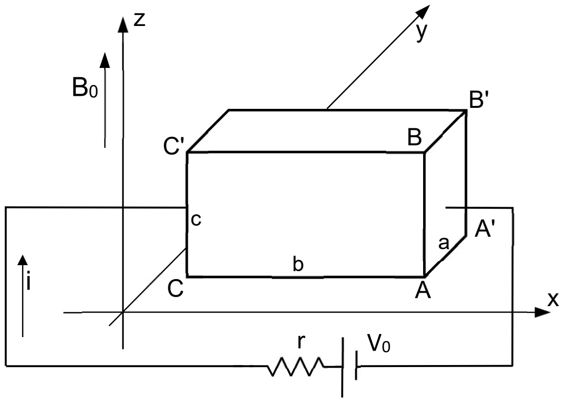
Il valore sarà: $\boldsymbol{V_2^f} = \frac{2}{3}\ 10\cdot 10^3 V \cong \boldsymbol{6{,}6\ kV}$ $\therefore$

B) Anche: $C_{TOT} = \frac{Q_{TOT}}{V^f}$; $C_{TOT} = C_1 // C_2 = \frac{3}{2}\ C_1$

Da cui: $V^f = \frac{Q_{TOT}}{C_{TOT}} = \frac{Q_1}{\frac{3}{2}C_1} = \frac{2}{3} V_1$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Si consideri un tubo chiuso di sezione rettangolare di dimensioni trasversali a e c (lungo l'asse y e z), e di lunghezza b (lungo l'asse x). Il tubo è realizzato con un materiale isolante ed è riempito di Hg (a temperatura ambiente e di resistività elettrica ρ) ed è immerso in una regione di spazio in cui è presente un campo di induzione magnetica B_0 costante ed uniforme diretto secondo l'asse z. Al mercurio che sta nel tubo è collegato un generatore di f.e.m costante V_0 con una resistenza interna r, che fa scorrere nel tubo una corrente i in direzione x (vedi figura).



A) Calcolare l'espressione e il valore della corrente i che scorre nel circuito.

B) Calcolare l'espressione e il valore della differenza di pressione (se esiste) fra le varie facce del tubo, quindi in direzione x, in direzione y e in direzione z, specificandone la direzione ed esprimendone, se diversa da zero, il valore in atmosfere.

Nota: il disegno non è in scala.

Dati: a = 1 mm ; b = 16 cm ; c = 2 mm ; B = 2 T ; V_0 = 0,4 V ; r= 20 mΩ ; ρ = 1 Ω mm²/m

NOTA: tutti i calcoli possono essere fatti con un'approssimazione del 10%.

Soluzione

A) La corrente che scorre nel circuito sarà $i = \frac{V_0}{R_T}$ dove R_T è la resistenza totale del circuito, quindi la somma della resistenza interna del generatore più quella del mercurio in direzione x; si ha quindi:

$$R(Hg) = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{b}{a \cdot c} = 1\,\Omega\frac{mm^2}{m}\frac{160\ mm}{1 \cdot 2 \cdot mm^2} = 80 \cdot 10^{-3}\Omega \quad ; \quad R_T = R(Hg) + r = (80+20)m\Omega = 0{,}1\,\Omega$$

Quindi: $$\boldsymbol{i = \frac{V_0}{R_T} = \frac{0{,}4}{0{,}1}A = 4\ A} \quad \therefore$$

B) La differenza di pressione è dovuta ad una differenza fra le forze esercitate sulle facce del tubo dall'interazione fra il mercurio, la corrente i che lo attraversa e il campo magnetico B.

La forza esercitata sul mercurio è $\bar{F} = i\,\bar{l} \times \bar{B} = -ibB\,\hat{y}$; L'unica componente diversa da zero si ha quindi in direzione - $\hat{y}$. Lungo le altre direzioni la forza, quindi la pressione è zero.

La pressione si eserciterà solo sulla faccia [ABC'C] di lati bc, in direzione - $\hat{y}$

$$\boldsymbol{p} = \frac{F}{S} = \frac{i \cdot b \cdot B}{b \cdot c} = \frac{\boldsymbol{iB}}{\boldsymbol{c}} = \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^3\ Pa = \boldsymbol{4\ kPa} \quad \therefore$$

Dato che: 1 Pa ≅ 10^{-5} Atm , si ha **p ≅ 4 ·10^{-2} Atm** ∴

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Si consideri un condensatore di capacità C, con le armature piane, parallele e di forma circolare con raggio R. All'interno del condensatore c'è il vuoto.

A questo condensatore è applicata una d.d.p. V(t) a partire dall'istante t=0: $V(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

A) Calcolare l'espressione e il valore la corrente di spostamento all'interno del condensatore per t = t* = 2s.

B) Calcolare l'espressione e il valore dell'induzione magnetica B in un punto fra le armature, distante r=2 cm dall'asse del condensatore e all'istante t = t* = 2s (lo stesso tempo utilizzato nel calcolo precedente).

Dati: C = 3 mF , R = 5 cm ; V_0 = 2 V ; τ = 4 s ; t*= 2 s ; r = 2 cm

NOTA: tutti i calcoli possono essere fatti con un'approssimazione del 10%.

Soluzione

A) $\mathbf{i(t)} = \frac{\mathrm{dq(t)}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{dV(t)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathbf{CV_0}}{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{e^{-t/\tau}}$ ∴

e per t*=2 *s*: $\boldsymbol{i(t^*)} = \frac{3\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot e^{-1/2}}{4} A \cong 1\cdot 10^{-3}\, A = \mathbf{1\, mA}$ ∴ $[e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}7}} \cong \frac{1}{1{,}6} \cong \frac{2}{3}]$

A) Anche: La corrente di spostamento sarà $i = J \cdot S$, dove J è la densità della corrente di spostamento e S la superficie delle armature del condensatore.

La densità della corrente si spostamento sarà: $J = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ dove: $E = V/d$, d essendo la distanza fra le armature.

Quindi: $J = \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\frac{1}{d}$ e $i = \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\frac{1}{d}\cdot S = C\frac{\partial V}{\partial t}$ essendo: $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$

Da cui: $\boldsymbol{i} = C\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{CV_0}}{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{e^{-t/\tau}}$ ∴ e per t*=2 *s*: $\boldsymbol{i(t^*)} = \frac{3\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot e^{-1/2}}{4} A \cong 1\cdot 10^{-3}\, A = \mathbf{1\, mA}$ ∴

B) Si può utilizzare la relazione: $\oint \bar{B}\cdot \overline{dl} = \mu_0\, i_c$ in cui l'integrale viene fatto su di una circonferenza di raggio r, parallela alle due armature e con centro sull'asse del condensatore, mentre i_c è la somma delle correnti concatenate con questa circonferenza. Il verso di B deve essere tangente alle circonferenza con centro sull'asse, dovendo B essere una linea chiusa.

Nota: tutti quelli che hanno utilizzato il teorema dell'induzione scrivendo per il flusso di B: $\phi(B) = B\cdot \pi R^2$ hanno commesso un grosso errore concettuale dato che B è perpendicolare alla superficie S.

Si ha quindi: $B\cdot 2\pi\, r = \mu_0\, i_c = \mu_0\, i(t^*)\, \frac{S(concatenata\ con\ r)}{S(totale)} = \mu_0\ i(t^*)\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

Per cui: $\boldsymbol{B(r,t^*)} = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\boldsymbol{2\pi}}\ \boldsymbol{i(t^*)}\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R^2}} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\ 1\cdot 10^{-3}\frac{2\cdot 10^{-2}}{25\cdot 10^{-4}}\, T = \mathbf{16\cdot 10^{-10}}\, \boldsymbol{T} = \mathbf{1{,}6}\, \boldsymbol{nT}$ ∴